

# BARYCENTRE

## I) ACTIVITES

**Activité 1 :** Sur une barre rigide de poids négligeable et de longueur 1m on considère deux boules métalliques de 500 g en A et de 350 g en B. M un point sur la barre. Déterminer la position de M sachant que le système est en équilibre.



**Activité 2 :** Soit ABC un triangle rectangle en A et  $AC = 2AB$ .

1- Montrer qu'il existe un et un seul point G tel que :  $2\vec{AG} - 2\vec{BG} + 2\vec{CG} = \vec{0}$

2- Tracer le point G.

3- Si le plan est rapporté au repère  $(A; \vec{AB}; \vec{AI})$

où I est milieu de [AC], quels seront les coordonnées du point G.

## II) DEFINITIONS ET PROPRIETES :

### 1) Vocabulaires

**Définitions :** Soit A un point et  $\alpha$  un réel non nul ; le couple  $(A, \alpha)$  s'appelle un point pondéré. Plusieurs points pondérés constituent un système pondéré

### 2) Barycentre de deux points pondérés.

#### 2.1 Définitions.

**Propriété :** Soit  $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$  un système pondéré, tel que  $\alpha + \beta \neq 0$

l'application  $f_2 : P \rightarrow V_2$  tel que :

$f_2(M) = \alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB}$  est une bijection et il existe

un et un seul point G qui vérifie  $f_2(G) = \vec{0}$

**Définition :** Soit  $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$  un système pondéré

tel que  $\alpha + \beta \neq 0$  ; le barycentre du système pondéré  $\Sigma$  est le point G qui vérifie :

$$\alpha\vec{AG} + \beta\vec{BG} = \vec{0}$$

On écrit :  $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$

#### 2.2 Propriétés de barycentre de deux points pondérés.

Soit  $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$  un système pondéré, tel que  $\alpha + \beta \neq 0$

et  $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$  On a donc :

$$\alpha\vec{AG} + \beta\vec{BG} = \vec{0}$$

et par suite : pour tout réel k non nul on a :

$$k\alpha\vec{AG} + k\beta\vec{BG} = \vec{0}$$

et donc  $G = \text{Bar}\{(A, k\alpha); (B, k\beta)\}$ .

**Propriété :**

a) Le barycentre d'un système pondéré de deux points ne varie pas si on multiplie les poids par le même réel non nul

b) Si  $\alpha = \beta$  le barycentre du système pondéré  $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$  s'appelle l'isobarycentre de A et B qui n'est que le milieu du segment [AB].

**Construction :**

• **Exemple1 :** Construire  $G = \text{Bar}\{(A, 4); (B, -5)\}$

$G = \text{Bar}\{(A, 4); (B, -5)\}$  donc :  $4\vec{AG} - 5\vec{BG} = \vec{0}$

$$4\vec{AG} + 5(\vec{GA} + \vec{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow -4\vec{GA} + 5\vec{GA} + 5\vec{AB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{GA} + 5\vec{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AG} = 5\vec{AB}$$

Donc le point  $G \in (AB)$



**Exemple2 :**

Construire  $G = \text{Bar}\{(A, \sqrt{8}); (B, -\sqrt{2})\}$

$$G = \text{Bar}\{(A, \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{8}); (B, \frac{1}{\sqrt{2}} \times (-\sqrt{2}))\}$$

donc :  $G = \text{Bar}\{(A, 2); (B, -1)\}$

• Soit  $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$  un système pondéré, tel que  $\alpha + \beta \neq 0$

et  $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$  On a donc par suite :

$$\alpha\vec{AG} + \beta\vec{BG} = \vec{0}$$

soit M est un point quelconque dans le plan (P)

on a donc :

$$\alpha(\vec{AM} + \vec{MG}) + \beta(\vec{BM} + \vec{MG}) = \vec{0} \Leftrightarrow (\alpha + \beta)\vec{MG} + \alpha\vec{AM} + \beta\vec{BM} = \vec{0}$$

$$\text{d'où : on conclut que : } \vec{MG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\vec{MA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta}\vec{MB}$$

**Propriété :** Soit  $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$  un système pondéré, tel que  $\alpha + \beta \neq 0$

et  $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ . Pour tout point M du

$$\text{plan (P) on a : } \vec{MG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\vec{MA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta}\vec{MB}$$

$$\text{ou } (\alpha + \beta)\vec{MG} = \alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB}$$

Cette propriété s'appelle la propriété caractéristique du barycentre.

**Propriété :** Si  $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$  alors les points A, B et G sont alignés.

**Preuve :** Il suffit d'utiliser la propriété précédente en posant A = M dans la propriété :

On aura :  $\overrightarrow{AG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \overrightarrow{AA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{AB}$

donc :  $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{AB}$

D'où les vecteurs  $\overrightarrow{AG}$  et  $\overrightarrow{AB}$  sont colinéaires et par suite : les points  $A, B$  et  $G$  sont alignés.

**Propriété :** Le plan  $(P)$  et rapporté à un repère

$R(O; \vec{i}; \vec{j})$  Soient  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  des points du plan et  $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$  on a :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{OB}$$

et donc on a les coordonnées de  $G$  :

$$\begin{cases} x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta} \\ y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta} \end{cases}$$

**Preuve :** (Il suffit d'utiliser la propriété caractéristique du barycentre en posant  $A = O$ )

**Exemples :** 1) Dans le plan  $(P)$  rapporté à un repère  $R(O; \vec{i}; \vec{j})$  Soient  $A(3; 2)$  et  $B(4; 1)$

Et soit  $G = Bar\{(A, 1); (B, -5)\}$

**Solution :** on a :  $\begin{cases} x_G = \frac{-x_A + 5x_B}{4} \\ y_G = \frac{-y_A + 5y_B}{4} \end{cases}$  donc  $\begin{cases} x_G = \frac{17}{4} \\ y_G = \frac{3}{4} \end{cases}$

Donc :  $G\left(\frac{17}{4}; \frac{3}{4}\right)$

**Exercice1 :** soit  $ABC$  un triangle et soit :

$I = Bar\{(B, 4); (C, -3)\}$

Déterminer les coordonnées du point  $I$  dans le repère  $R(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

**Solution :** on a : donc  $(4 + (-3))\overrightarrow{AI} = 4\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$

donc  $\overrightarrow{AI} = 4\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$  donc dans le repère

$R(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$   $I(4; -3)$

**Exercice2 :**  $E$  et  $F$  deux points du plan tels que :  $\overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{EF}$  et  $E \notin (AB)$  et  $G$  est le barycentre des points  $(A; 2)$  et  $(B; -3)$

1) Montrer que  $G$  est le barycentre des points  $(E; -1)$  et  $(F; 2)$

2) en déduire que les droites  $(EF)$  et  $(AB)$  se coupent et déterminer le point d'intersection

**solution :**  $\overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{EF} \Leftrightarrow \overrightarrow{EG} = 2(\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GF})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{EG} + 2\overrightarrow{GF} \Leftrightarrow -\overrightarrow{EG} - 2\overrightarrow{GF} = \vec{0}$

$-\overrightarrow{GE} + 2\overrightarrow{GF} = \vec{0}$  donc  $G$  est le barycentre des points  $(E; -1)$  et  $(F; 2)$

2) on a  $G$  le barycentre des points  $(E; -1)$  et  $(F; 2)$  donc  $G \in (EF)$  et on a  $G$  est le barycentre des points  $(A; 2)$  et  $(B; -3)$  donc  $G \in (AB)$

Donc les droites  $(EF)$  et  $(AB)$  se coupent en  $G$

**Exercice3 :** Dans le plan  $(P)$  rapporté à un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  Soient  $A(0; 5)$  et  $B(3; 2)$

Et soit  $G = Bar\{(A, 1); (B, 2)\}$

1) Déterminer les coordonnées de  $G$

2) Déterminer et dessiner l'ensemble suivant :

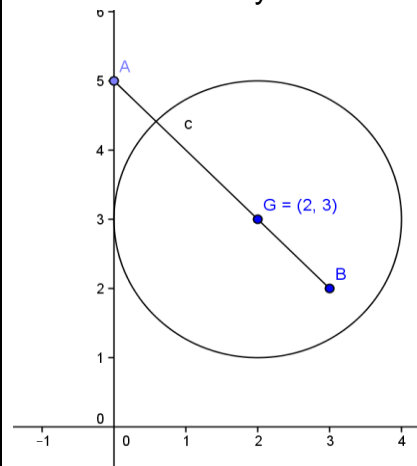
$(C) = \{M \in (P) / \|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\| = 6\}$

**Solution :**  $\begin{cases} x_G = \frac{0+6}{3} = 2 \\ y_G = \frac{5+4}{3} = 3 \end{cases}$  donc  $G(2; 3)$

D'après la propriété caractéristique du barycentre on a :  $\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\| = 6cm \Leftrightarrow \|3\overrightarrow{MG}\| = 6cm$

$\Leftrightarrow \|3\overrightarrow{MG}\| = 6cm \Leftrightarrow 3MG = 6cm \Leftrightarrow MG = 2cm$

Donc l'ensemble des points est le cercle de centre  $G$  et de rayon  $r = 2cm$



**3) Barycentre de trois points pondérés**

**Propriété :**

Soit  $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$  un système pondéré, tel que  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$  l'application :

$f_3 : P \rightarrow V_2$  tel que :  $f_3(M) = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$

est une bijection. Il existe un et un seul point  $G$  qui vérifie  $f_3(G) = \vec{0}$

c'est à dire :  $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

**Preuve :**  $f_3$  est l'application de Leibniz pour trois points

**Propriété :** Soit  $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$  un système pondéré, tel que  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

et  $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$   
 si  $M$  est un pont quelconque dans le plan  $(P)$

$$\text{on a : } \overline{MG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma} \overline{MA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \overline{MB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \overline{MC}$$

$$\text{donc : } (\alpha + \beta + \gamma) \overline{MG} = \alpha \overline{MA} + \beta \overline{MB} + \gamma \overline{MC}$$

**Preuve :** Même démonstration que dans le cas précédent.

**Construction :**

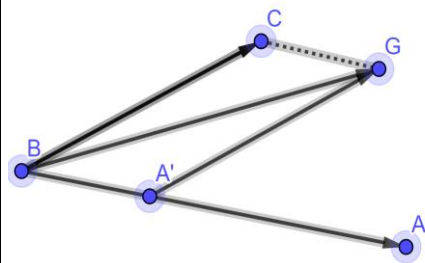
• **Exemple :**

1° Construire  $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, -1); (C, 3)\}$   
 $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, -1); (C, 3)\}$  donc d'après la propriété caractéristique du barycentre on a :

$$(1 + (-1) + 3) \overline{MG} = 1 \overline{MA} + (-1) \overline{MB} + 3 \overline{MC}$$

On pose :  $M = B$  on aura :

$$3 \overline{BG} = \overline{BA} + 3 \overline{BC} \Leftrightarrow \overline{BG} = \frac{1}{3} \overline{BA} + \overline{BC}$$

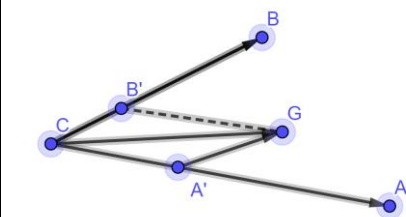


2° Construire  $G = \text{Bar}\{(A, 4); (B, 1/2); (C, -3)\}$   
 Donc d'après la propriété caractéristique du barycentre on a :

$$(4 + 1/2 - 3) \overline{MG} = 4 \overline{MA} + 1/2 \overline{MB} - 3 \overline{MC}$$

On pose :  $M = C$  on aura :

$$\frac{3}{2} \overline{CG} = 4 \overline{CA} + \frac{1}{2} \overline{CB} \Leftrightarrow \overline{CG} = \frac{8}{3} \overline{CA} + \frac{1}{3} \overline{CB}$$



**Exercice 4 :** Soit  $ABC$  un triangle et  $G$  point tel que :  $2\overline{AC} = 3\overline{AG} - \overline{GB}$

1) montrer que  $G$  le barycentre de :  $\{(A, 1); (B, 1); (C, 2)\}$  et construire le point  $G$

$$\text{Solution : } 2\overline{AC} = 3\overline{AG} - \overline{GB} \Leftrightarrow 2\overline{AC} - 3\overline{AG} + \overline{GB} = \vec{0}$$

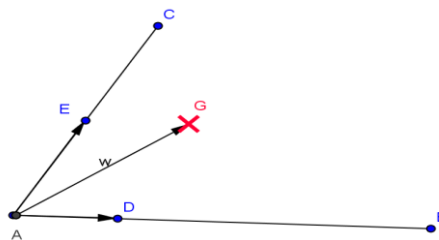
$$\Leftrightarrow 2(\overline{AG} + \overline{GC}) - 3\overline{AG} + \overline{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow -\overline{AG} + \overline{GB} + 2\overline{GC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -\overline{AG} + \overline{GB} + 2\overline{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{GA} + \overline{GB} + 2\overline{GC} = \vec{0}$$

Donc  $G$  le barycentre de :  $\{(A, 1); (B, 1); (C, 2)\}$

$$\text{On a : } \textcircled{R} \quad \overline{AG} = \frac{b}{a+b+c} \overline{AB} + \frac{c}{a+b+c} \overline{AC}$$

$$\text{Donc : } \overline{AG} = \frac{1}{4} \overline{AB} + \frac{1}{2} \overline{AC} \quad \text{donc} \quad \overline{AG} = \frac{1}{4} \overline{AB} + \frac{2}{4} \overline{AC}$$



**Propriété :** Le plan  $(P)$  et rapporté à un repère

$R(O; \vec{i}; \vec{j})$  Soient  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  et  $C(x_C; y_C)$  des points du plan

et  $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$

$$\text{on a : } \overline{OG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma} \overline{OA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \overline{OB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \overline{OC}$$

et donc on a les coordonnées de  $G$  :

$$\begin{cases} x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma} \\ y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma} \end{cases}$$

**Propriété :**

Le barycentre d'un système pondéré de trois points ne varie pas si on multiplie les poids par le même nombre non nul :

$$\text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\} = \text{Bar}\{(A, k\alpha); (B, k\beta); (C, k\gamma)\} \text{ pour } k \neq 0$$

**Exercice :**

Soit  $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$  où  $\alpha + \beta \neq 0$  et  $G' = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$

Montrer que  $G = \text{Bar}\{(G', (\alpha + \beta)); (C, \gamma)\}$

**Propriété :**

Si  $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$  avec  $\alpha + \beta \neq 0$  et  $G' = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$

Alors :  $G = \text{Bar}\{(G', (\alpha + \beta)); (C, \gamma)\}$

**Remarque :** La propriété d'associativité nous permet de construire le barycentre de trois points pondérés.

**Exercice 5 :** on utilisant La propriété d'associativité Construire le barycentre  $G$  du système pondéré  $\{(A, 2); (B, -3); (C, 5)\}$

**Solution :** soit  $E = \text{Bar}\{(A, 2); (B, -3)\}$  d'après la propriété caractéristique du barycentre

$$\text{on a : } -\overline{ME} = 2\overline{MA} - 3\overline{MB}$$

$$\text{On pose : } M = A \text{ on aura : } -\overline{AE} = -3\overline{AB}$$

$$\text{Donc : } \overline{AE} = 3\overline{AB}$$

d'après la Propriété d'associativité on a :

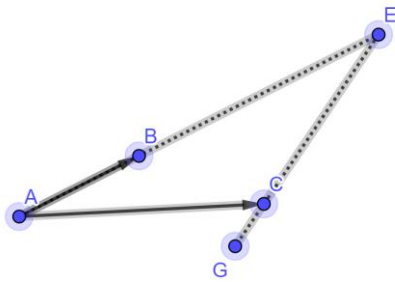
$$G = \text{Bar}\{(E, -1); (C, 5)\}$$

d'après la propriété caractéristique du barycentre

$$\text{on a : } 4\overline{MG} = -\overline{MA} + 5\overline{MC}$$

On pose :  $M = E$  on aura :

$$4\overrightarrow{EG} = 5\overrightarrow{EC} \Leftrightarrow \overrightarrow{EG} = \frac{5}{4}\overrightarrow{EC}$$



### Cas particulier

Si les poids  $\alpha$ ;  $\beta$  et  $\gamma$  sont égaux le barycentre de  $\{(A, \alpha); (B, \alpha); (C, \alpha)\}$

S'appelle le **centre de gravité** du triangle  $ABC$ .

**Exercice 6 :** Soit  $ABC$  un triangle. et  $G$  le centre de gravité du triangle  $ABC$  et  $I$  le milieu du segment  $[BC]$ . Montrer que  $G$  est le centre de gravité de  $(A;1)$  et  $(I;2)$

**Solution :**  $G$  le centre de gravité du triangle  $ABC$

Donc  $G$  est le barycentre de :

$$\{(A, 1); (B, 1); (C, 1)\}$$

$I$  le milieu du segment  $[BC]$  Donc  $I$  est le

barycentre de :  $\{(B, 1); (C, 1)\}$

D'après la Propriété d'associativité on a :

$G$  est le barycentre de :  $\{(I, 2); (A, 1)\}$

**Exercice7 :** Soit  $ABC$  un triangle. Pour tout point

$M$  on pose :  $\vec{v} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$

1) Réduire l'écriture de  $\vec{v}$  et montrer que  $\vec{v}$  ne dépend pas du point  $M$

2) soit  $K = \text{Bar}\{(C, -3); (B, 1)\}$  montrer que :

$$\vec{v} = 2\overrightarrow{KA}$$

3) soit  $G = \text{Bar}\{(A, 2); (B, -1); (C, -3)\}$

montrer que : Pour tout point  $M$  on a :

$$2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{GM}$$

4) en déduire l'ensemble des points  $M$  tel que

$$\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}\|$$

**Solution :** 1)

$$\vec{v} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} - 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC})$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} \text{ donc } \vec{v} \text{ ne dépend pas du point } M$$

2) on a :  $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$  Pour tout

point  $M$  donc si  $M = K$  on aura :

$$2\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} - 3\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$$

Et on a :  $K = \text{Bar}\{(C, -3); (B, 1)\}$  donc :  $\overrightarrow{KB} - 3\overrightarrow{KC} = \vec{0}$

Donc :  $2\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$  donc :  $2\overrightarrow{KA} = \vec{v}$

3) d'après la propriété caractéristique du

barycentre on a :

$$2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = (2 + (-1) + (-3))\overrightarrow{MG} = -2\overrightarrow{MG} = 2\overrightarrow{GM}$$

$$4)\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}\|$$

$$\Leftrightarrow \|2\overrightarrow{GM}\| = \|2\overrightarrow{KA}\| \Leftrightarrow 2GM = 2KA \Leftrightarrow GM = KA$$

Donc l'ensemble des points est le cercle  $(C)$  de centre  $G$  et de rayon  $r = KA$

**Exercice 8 :** Soit  $ABC$  un triangle tel que :

$AC = 6\text{cm}$  et  $AB = 5\text{cm}$  et  $BC = 4\text{cm}$

a) Construire  $G$  le barycentre de :

$$\{(A, 1); (B, 2); (C, 1)\}$$

b) Déterminer et Construire l'ensemble  $(E)$  des

points  $M$  du plan tel que :  $\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = AC$

c) Déterminer et Construire l'ensemble  $(F)$  des

points  $M$  du plan tel que :

$$\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MC}\|$$

**Solution :**  $G$  est le barycentre de :

$\{(A, 1); (B, 2); (C, 1)\}$  donc  $G$  est le barycentre

de :  $\{(B, 2); (I, 2)\}$  d'après La propriété

d'associativité du barycentre

Donc  $G$  est le milieu du segment  $[BI]$

b) D'après la propriété caractéristique du

barycentre on a :  $\|4\overrightarrow{MG}\| = AC \Leftrightarrow GM = \frac{AC}{4} = 1.5$

Donc l'ensemble des points est le cercle de centre  $G$  et de rayon  $r = 1.5\text{cm}$

b) Soit  $G'$  est le barycentre de :

$\{(A, 3); (C, 1)\}$  Donc d'après la propriété

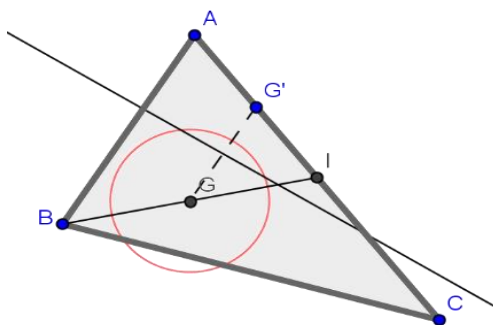
caractéristique du barycentre on a :  $\forall M \in (P)$

$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MG} \text{ et } 3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MG}'$$

Donc :  $M \in (F) \Leftrightarrow 4MG = 4MG' \Leftrightarrow MG = MG'$

Donc :  $(F)$  est la médiatrice du segment  $[GG']$

Et pour construire le point  $G'$  on a :  $\overrightarrow{AG}' = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$



5) Barycentre de quatre points pondérés

**Propriété :**

Soit  $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$  un système pondéré, tel que  $\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$  l'application :

$f_4 : P \rightarrow V_2$  tel que :

$$f_4(M) = \alpha \overline{MA} + \beta \overline{MB} + \gamma \overline{MC} + \delta \overline{MD}$$

Est une bijection. Il existe un et un seul point  $G$  qui vérifie  $f_4(G) = \vec{0}$

c'est à dire :  $\alpha \overline{GA} + \beta \overline{GB} + \gamma \overline{GC} + \delta \overline{GD} = \vec{0}$

**Preuve :**  $f_4$  est l'application de Leibniz pour quatre points

**Propriété :**

Soit  $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$  un système pondéré, tel que  $\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$  et

$G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$

si  $M$  est un point quelconque dans le plan  $(P)$

$$\text{on a : } \overline{MG} = \frac{\alpha}{s} \overline{MA} + \frac{\beta}{s} \overline{MB} + \frac{\gamma}{s} \overline{MC} + \frac{\delta}{s} \overline{MD}$$

où  $s = \alpha + \beta + \gamma + \delta$

**Preuve :** Même démonstration que dans les cas précédents.

**Propriété :** Le plan  $(P)$  et rapporté à un repère

$R(O; \vec{i}; \vec{j})$  Soient  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  et  $C(x_C; y_C)$

et  $D(x_D; y_D)$  des points du plan

$G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$

$$\text{on a : } \overline{OG} = \frac{\alpha}{s} \overline{OA} + \frac{\beta}{s} \overline{OB} + \frac{\gamma}{s} \overline{OC} + \frac{\delta}{s} \overline{OD}$$

Et donc on a les coordonnées de  $G$  :

$$\begin{cases} x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C + \delta x_D}{s} \\ y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C + \delta y_D}{s} \end{cases}$$

où  $s = \alpha + \beta + \gamma + \delta$

**Propriété :** Le barycentre d'un système pondéré de quatre points ne varie pas si on multiplie les poids par le même nombre

Non nul :  $\text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\} =$

$\text{Bar}\{(A, k\alpha); (B, k\beta); (C, k\gamma); (D, k\delta)\}$

pour  $k \neq 0$

**Propriété :** Si  $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$

avec  $\alpha + \beta \neq 0$  et  $\gamma + \delta \neq 0$

Si  $G' = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$

et  $G'' = \text{Bar}\{(C, \gamma); (D, \delta)\}$

Alors  $G = \text{Bar}\{(G', (\alpha + \beta)); (G'', (\gamma + \delta))\}$

**Remarque :** La propriété d'associativité nous permet de construire le barycentre de quatre points pondérés.

**Exercice9 :** Dans le plan  $(P)$  rapporté à un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  Soient  $A(-1;1)$  et  $B(0;2)$  et  $C(1;-1)$

et  $D(1;0)$  Et soit  $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 2)\}$

1) Déterminer les coordonnées de

$K = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 3)\}$

2) Déterminer les coordonnées de  $L$  le centre de gravité du triangle  $ABC$

3) Déterminer les coordonnées de Barycentre des points  $(A;2)$  et  $(B;3)$  et  $(C;1)$  et  $(D;-1)$

**Solution :1)** 
$$\begin{cases} x_K = \frac{-2+0}{5} = -\frac{2}{5} \\ y_K = \frac{2+6}{5} = \frac{8}{5} \end{cases} \text{ donc } K\left(-\frac{2}{5}; \frac{8}{5}\right)$$

2) les coordonnées de  $L$  sont :

$$\begin{cases} x_L = \frac{1x_A + 1x_B + 1x_C}{1+1+1} \\ y_L = \frac{1y_A + 1y_B + 1y_C}{1+1+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_L = \frac{1 \times (-1) + 1 \times 0 + 1 \times 1}{1+1+1} = 0 \\ y_L = \frac{1 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times (-1)}{1+1+1} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Donc  $L\left(0; \frac{2}{3}\right)$

$$\begin{cases} x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C + \delta x_D}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} \\ y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C + \delta y_D}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{2 \times (-1) + 3 \times 0 + 1 \times 1 + (-1) \times 1}{5} = -\frac{2}{5} \\ y_G = \frac{2 \times 1 + 3 \times 2 + 1 \times (-1) + (-1) \times 0}{5} = \frac{7}{5} \end{cases}$$

$G\left(-\frac{2}{5}; \frac{7}{5}\right)$

**Application :**  $ABCD$  un rectangle tel que :

$AB = 2BC$  Construire le barycentre du système pondéré  $\{(A, -2); (B, 3); (C, 1); (D, 1)\}$

**Cas particulier :** Si les poids  $\alpha; \beta$  et  $\gamma$  sont égaux le barycentre de :

$\{(A, \alpha); (B, \alpha); (C, \alpha); (D, \delta)\}$  s'appelle le **centre de gravité** du quadrilatère convexe  $ABCD$

**Exercice10 :** soit  $ABCD$  un quadrilatère convexe

Soit  $H$  le barycentre du système pondéré

$\{(A, 2); (B, 5); (C, -1)\}$

Soit  $K$  le barycentre du système pondéré

$\{(B, 5); (C, -1); (D, 6)\}$

Soit  $E = \text{Bar}\{(C, -1); (B, 5)\}$

1) Montrer que  $\overline{BE} = -\frac{1}{4} \overline{BC}$  et Construire  $E$

2) Montrer que  $H$  est le barycentre du système pondéré  $\{(A, 1); (E, 2)\}$  et Construire  $H$

3) Montrer que  $K$  est le barycentre du système pondéré  $\{(D, -3); (E, 2)\}$

4) a) Montrer que D est le barycentre du système pondéré  $\{(K, 1); (E, 2)\}$

b) en déduire que  $(AK) \parallel (DH)$

**Solution :**

1) on sait que si M est un point quelconque dans le plan (P) on a :

$$\overline{ME} = \frac{1}{4}(5\overline{MB} - \overline{MC})$$

Pour : M=B on a :  $\overline{BE} = -\frac{1}{4}\overline{BC}$  et on peut

Construire E

2) on a : E = Bar  $\{(C, -1); (B, 5)\}$  et  $5 + (-1) = 4$

D'après La propriété d'associativité on a H le barycentre du système pondéré  $\{(A, 2); (E, 4)\}$  et puisque Le barycentre d'un système pondéré ne varie pas si on multiplie les poids par le même réel non nul on trouve donc que H est le barycentre du système pondéré

$\{(A, 1); (E, 2)\}$

on sait que si M est un point quelconque dans le plan (P) on a :

$$\overline{MH} = \frac{1}{3}(2\overline{ME} + \overline{MA})$$

Pour : M=A on a :  $\overline{AH} = \frac{2}{3}\overline{AE}$  et on peut

Construire E

3) D'après La propriété d'associativité on trouve que K le barycentre du système

Pondéré  $\{(D, -6); (E, 4)\}$

Et puisque Le barycentre d'un système pondéré ne varie pas si on multiplie les poids par le même réel non nul on trouve donc que K est le barycentre du système pondéré

$\{(D, -3); (E, 2)\}$

4) a) Montrons que D est le barycentre du système pondéré  $\{(K, 1); (E, 2)\}$  ?

Puisque K est le barycentre du système pondéré  $\{(D, -3); (E, 2)\}$

Pour tout point M du plan (P) on a :

$$-\overline{MK} = -3\overline{MD} + 2\overline{ME}$$

$$\text{Donc : } 3\overline{MD} = \overline{MK} + 2\overline{ME}$$

Donc : D est le barycentre du système pondéré  $\{(K, 1); (E, 2)\}$

4) b) Pour tout point M du plan (P) on a :

$$3\overline{MH} = 2\overline{ME} + \overline{MA} \text{ et } 3\overline{MD} = 2\overline{ME} + \overline{MK}$$

$$\text{Donc : } 3\overline{DH} = 3\overline{MH} - 3\overline{MD}$$

$$3\overline{DH} = 3(\overline{MH} - \overline{MD})$$

$$\text{Donc : } 3\overline{DH} = \overline{MA} - \overline{MK}$$

Donc :  $(AK) \parallel (DH)$  : Donc  $3\overline{DH} = -\overline{AK}$

**Exercice11 :** ABC un triangle

I et J et K points tels que :  $2\overline{BI} = 3\overline{BC}$

Et  $8\overline{CJ} = \overline{CA}$  et  $5\overline{AK} = 2\overline{AB}$

1) Montrer que I est le barycentre des points

pondéré  $\left(B; \frac{1}{2}\right)$  et  $\left(C; \frac{-3}{2}\right)$

2) le plan (P) est rapporté au repère

$$R(A; \overline{AB}; \overline{AC})$$

a) Déterminer les coordonnées du point J

b) Déterminer une équation cartésienne de la droite (IK)

c) Montrer que les points I et J et K sont alignés.

**Solution : 1)**

$$\frac{1}{2}\overline{BI} - \frac{3}{2}\overline{CI} = \frac{1}{2}\overline{BI} - \frac{3}{2}(\overline{CB} + \overline{BI})$$

$$= \frac{1}{2}\overline{BI} - \frac{3}{2}\overline{CB} - \frac{3}{2}\overline{BI} = -\overline{BI} + \frac{3}{2}\overline{BC} = -\frac{3}{2}\overline{BC} + \frac{3}{2}\overline{BC} = \vec{0}$$

Donc :  $\frac{1}{2}\overline{BI} - \frac{3}{2}\overline{CI} = \vec{0}$  par suite : I est le

barycentre des points pondéré  $\left(B; \frac{1}{2}\right)$  et  $\left(C; \frac{-3}{2}\right)$

2) dans le repère  $R(A; \overline{AB}; \overline{AC})$  on a : A(0;0) et

B(1;0) et C(0;1)

a) on a :  $8\overline{CJ} = \overline{CA}$  donc :  $8\overline{CA} + 8\overline{AJ} = \overline{CA}$

$$\text{donc : } 8\overline{AJ} = -7\overline{CA} \text{ donc : } \overline{AJ} = \frac{7}{8}\overline{AC}$$

donc :  $J\left(0; \frac{7}{8}\right)$

b) la droite (IK) passe par I et de vecteur directeur

$\overline{IK}$  et on a : I est le barycentre de  $\left(B; \frac{1}{2}\right)$  et

$$\left(C; \frac{-3}{2}\right) \text{ donc : } \begin{cases} x_I = \frac{\frac{1}{2} \times 1 - \frac{3}{2} \times 0}{-1} = -\frac{1}{2} \\ y_I = \frac{\frac{1}{2} \times 0 - \frac{3}{2} \times 1}{-1} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Donc :  $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$

Et on a :  $5\overline{AK} = 2\overline{AB}$  Donc :  $\overline{AK} = \frac{2}{5}\overline{AB}$

Donc :  $K\left(\frac{2}{5}; 0\right)$  Donc :  $\overline{IK}\left(\frac{9}{10}; \frac{3}{2}\right)$

L'équation cartésienne de la droite (IK) est :

$$\frac{3}{2}x - \frac{9}{10}y + c = 0$$

$$I \in (IK): \text{ donc : } \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{9}{10}\left(\frac{3}{2}\right) + c = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{4} - \frac{27}{20} + c = 0 \Leftrightarrow c = \frac{21}{10}$$

$$\text{donc : } (IK): \frac{3}{2}x - \frac{9}{10}y + \frac{21}{10} = 0$$

$$(IK): 15x - 9y + 21 = 0$$

c) pour Montrer que les points  $I$  et  $J$  et  $K$  sont alignés il suffit de montrer que  $J \in (IK)$

$$\text{on a : } (IK): 15x - 9y + 21 = 0 \text{ et } J\left(0; \frac{7}{8}\right)$$

$$\text{et on a : } 15 \times 0 - 9 \times \frac{7}{8} + 21 = -21 + 21 = 0$$

par suite :  $J \in (IK)$  donc les points  $I$  et  $J$  et  $K$  sont alignés.

**Exercice12 :** ABC un triangle et  $I$  un point tel que :  $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$  et  $K$  le symétrique de  $A$  par rapport a  $C$  et  $J$  le milieu du segment  $[BC]$

1) exprimer  $I$  et  $J$  et  $K$  comme le barycentre de points pondérés a déterminer

2)quelle est le barycentre des points pondérés  $(A;1) ; (B;2) ; (B;-2)$  et  $(C;-2)$  ?

3)Monter que les points  $I$  et  $J$  et  $K$  sont alignés.

**Solution :1)**

• on a  $J$  le milieu du segment  $[BC]$

Donc :  $J$  est le barycentre des points pondéré  $(B;1)$  et  $(C;1)$

• on a :  $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{IB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$  Donc :  $I$  est le barycentre des points pondéré  $(A;1)$  et  $(B;2)$

• on a :  $K$  le symétrique de  $A$  par rapport a  $C$

Donc :  $2\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{KA}$

Donc :  $\overrightarrow{KA} - 2\overrightarrow{KC} = \vec{0}$

Donc :  $K$  est le barycentre des points pondéré  $(A;1)$  et  $(C;-2)$

2) on a :  $K$  est le barycentre des points pondéré  $(A;1)$  et  $(C;-2)$  donc :

$$1\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} - 2\overrightarrow{KB} - 2\overrightarrow{KC} = \vec{0}$$

Donc :  $K$  est le barycentre des points pondéré  $(A;1)$  et  $(B;2)$  et  $(B;-2)$  et  $(C;-2)$

3) D'après La propriété d'associativité on trouve que  $K$  le barycentre des points pondéré  $(J;-4)$  et

$(I;3)$  par suite :  $K \in (IJ)$  donc les points  $I$  et  $J$  et  $K$  sont alignés.

**Exercice13:** ABCD un carré et  $I$  et  $J$  les milieux respectivement des segments  $[BC]$  et  $[CD]$  et  $M$  et

$N$  deux points tel que :  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

1) déterminer le barycentre des points pondérés  $\{(A, 3) ; (B, 1)\}$  et  $\{(A, 3) ; (D, 1)\}$

2) soit  $G$  le barycentre des points pondérés  $(A;3) ; (B;1) ; (C;1)$  et  $(D;1)$

3) Montrer que les droites  $(MJ)$  et  $(NI)$  et  $(AC)$  sont concourantes en  $G$

**Solution :** 1) on a :  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$

$$\text{donc : } 3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$$

Donc :  $M$  est le barycentre des points pondéré  $(A;3)$  et  $(B;1)$

De même on a :  $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{ND}$

$$\text{donc : } 3\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{ND} = \vec{0}$$

Donc :  $N$  est le barycentre des points pondéré  $(A;3)$  et  $(D;1)$

2) soit  $G$  le barycentre des points pondérés  $(A;3) ; (B;1) ; (C;1)$  et  $(D;1)$  et puisque  $J$  le milieu du segment  $[DC]$  alors  $J$  est le barycentre des points pondéré  $(C;1)$  et  $(D;1)$

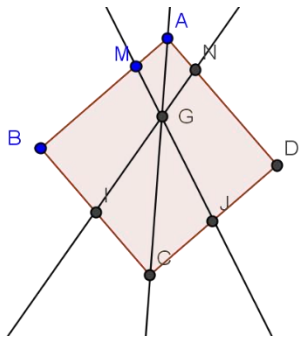
D'après La propriété d'associativité on trouve que  $G$  est le barycentre des points pondéré  $(M;4)$  et  $(J;2)$  par suite :  $G \in (JM)$

De même on a :  $I$  le milieu du segment  $[BC]$  alors  $I$  est le barycentre des points pondéré  $(B;1)$  et  $(C;1)$  et d'après La propriété d'associativité on trouve que  $G$  est le barycentre des points pondéré  $(N;4)$  et  $(I;2)$  par suite :  $G \in (NI)$

Soit  $H$  le centre de gravité du triangle BCD donc  $H$  est le barycentre des points pondéré  $(B;1)$  et  $(C;1)$  et  $(D;1)$  par suite D'après La propriété

d'associativité on trouve que  $G$  est le barycentre des points pondéré  $(A;3)$  et  $(H;3)$  donc :  $G$  le milieu du segment  $[AH]$  et puisque ABCD est un carré alors :  $H \in [AC]$  donc  $G \in (AC)$

Conclusion : les droites  $(MJ)$  et  $(NI)$  et  $(AC)$  sont concourantes en  $G$



**Exercice14:** A et B deux points tel que :  $AB=4cm$  et soit  $(F)$  l'ensemble des points M du plan tel que :  $\frac{MA}{MB} = 3$

- 1) montrer que :  $M \in (F) \Leftrightarrow \overline{MA}^2 - 9\overline{MB}^2 = 0$
- 2) soit G le barycentre des points pondérés (A;1) ; (B;3) et K le barycentre des points pondérés (A;1) ; (B;-3)

- a) Montrer que :  $M \in (F) \Leftrightarrow \overline{MG} \cdot \overline{MK} = 0$
- b) En déduire l'ensemble (F) et le tracer

**Solution :** 1)  $M \in (F) \Leftrightarrow \frac{MA}{MB} = 3 \Leftrightarrow MA = 3MB$

$$M \in (F) \Leftrightarrow \overline{MA}^2 - 9\overline{MB}^2 = 0$$

2)a)

$$M \in (F) \Leftrightarrow \overline{MA}^2 - 9\overline{MB}^2 = 0 \Leftrightarrow (\overline{MA} - 3\overline{MB})(\overline{MA} + 3\overline{MB}) = 0$$

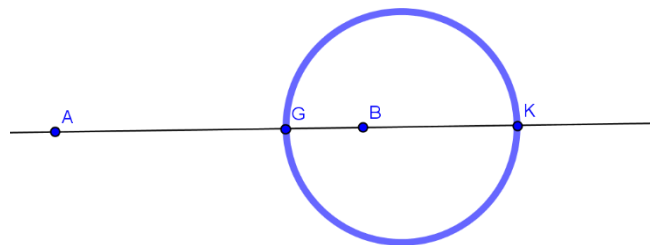
et d'après La propriété caractéristique du barycentre on aura :

$$\overline{MA} + 3\overline{MB} = 4\overline{MG} \quad \text{et} \quad \overline{MA} - 3\overline{MB} = -2\overline{MK}$$

$$\text{Donc : } M \in (F) \Leftrightarrow \overline{MA}^2 - 9\overline{MB}^2 = 0 \Leftrightarrow -8\overline{MA} \cdot \overline{MK} = 0$$

$$\text{Donc : } M \in (F) \Leftrightarrow \overline{MA} \cdot \overline{MK} = 0$$

2)b) d'après a) en déduit que (F) est le cercle de dont un diamètre est [GK]



**Exercice15:** A et B deux points tel que :  $AB=4cm$  et I le milieu du segment [AB]

1) soit  $(E)$  l'ensemble des points M du plan tel que :  $\overline{IM} \cdot \overline{AB} = 4$  et soit H le barycentre des points pondérés (A;1) ; (B;3)

- a) montrer que :  $H \in (E)$
- b) vérifier que :  $M \in (E) \Leftrightarrow \overline{HM} \cdot \overline{AB} = 0$
- c) déterminer la nature de l'ensemble (E)

2) soit  $(F)$  l'ensemble des points M du plan tel que :  $MA^2 - MB^2 = 8$

- a) Montrer que :  $\forall M \in (P)$  on a :  $MA^2 - MB^2 = 2\overline{IM} \cdot \overline{AB}$
- b) En déduire que  $(F) = (E)$  et le tracer

**Solution :** 1) on a : H le barycentre des points pondérés (A;1) ; (B;3) donc :  $\overline{AH} = \frac{3}{4}\overline{AB}$

$$\text{Et on a } \overline{IH} = \overline{IA} + \overline{AH} \quad \text{donc} \quad \overline{IH} = -\frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{3}{4}\overline{AB}$$

$$\text{donc } \overline{IH} = \frac{1}{4}\overline{AB} \quad \text{par suite} \quad \overline{IH} \cdot \overline{AB} = \frac{1}{4}AB^2 = 4$$

Donc  $H \in (E)$

$$b) M \in (E) \Leftrightarrow \overline{IM} \cdot \overline{AB} = 4 \Leftrightarrow \overline{IM} \cdot \overline{AB} = \overline{IH} \cdot \overline{AB}$$

$$\Leftrightarrow (\overline{IM} - \overline{IH}) \cdot \overline{AB} = 0 \Leftrightarrow \overline{HM} \cdot \overline{AB} = 0$$

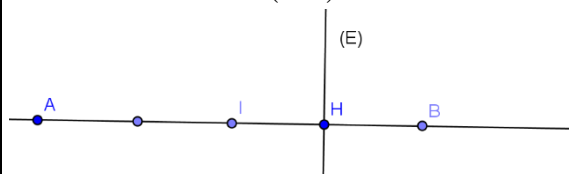
c) de b) on déduit que (E) est la droite perpendiculaire a (AB) en H

$$2)a) MA^2 - MB^2 = 0 \Leftrightarrow (\overline{MA} - \overline{MB})(\overline{MA} + \overline{MB}) = 2\overline{IM} \cdot \overline{AB}$$

car d'après La propriété caractéristique du barycentre on a :  $\overline{MA} + \overline{MB} = 2\overline{MI}$

$$2)b) M \in (F) \Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = 8 \Leftrightarrow \overline{MA} \cdot \overline{AB} = 4 \Leftrightarrow M \in (E)$$

Donc  $(F) = (E)$  par suite (F) est la droite perpendiculaire a (AB) en H



**Solution16 :** A et B deux points tel que :  $AB=3cm$  et I le milieu du segment [AB]

1) soit  $(C)$  l'ensemble des points M du plan tel que :  $MA^2 + MB^2 = 9$  et soit H le barycentre des points pondérés (A;1) ; (B;3)

- a) monter que :  $M \in (C) \Leftrightarrow MI = \frac{3}{2}$
- b) déterminer la nature et tracer l'ensemble (C)



2) soit :  $(C')$  l'ensemble des points  $M$  du plan tel

$$\text{que : } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{-5}{4}$$

a) Montrer que :  $M \in (C') \Leftrightarrow MI = 1$

b) déterminer la nature et tracer l'ensemble  $(C')$

**Solution :** 1) on a :

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 \\ &= 2MI^2 + 2IA^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}) = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} \end{aligned}$$

Car :  $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} = \vec{0}$

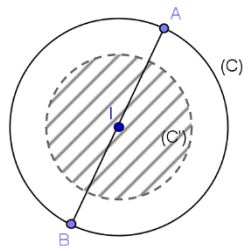
$$M \in (C) \Leftrightarrow 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = 9 \Leftrightarrow MI = \frac{3}{2}$$

b) en déduit que  $(C)$  est le cercle de centre  $I$  et de rayon  $r = \frac{3}{2}$

$$2) a) \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$$

Donc :  $M \in (C') \Leftrightarrow MI = 1$

2) b) en déduit que  $(C')$  est le cercle de centre  $I$  et de rayon  $r = 1$



**C'est en forgeant que l'on devient forgeron »**

**Dit un proverbe.**

**C'est en s'entraînant régulièrement aux  
calculs et exercices**

**Que l'on devient un mathématicien**